1. Osnovi matematičke analize

Nizovi

3. Odrediti a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+3n+5}{3n^3+5n^2+1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+2}{3-5^{n+1}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+2}\right)^{n^2}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

Rešenje

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^3+3n+5}{n^3}}{\frac{3n^3+5n^2+1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}}=\frac{4}{3}.$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+1}=3.$$

4. Naći: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)$

Rešenje

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

5. Odrediti granične vrednosti

a) $a_n=\left(1-\dfrac{2}{3n}\right)^n$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{n}{n-2}\right)^{2n}$

c) $a_n=\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^{n-1}}}$ d) $a_n=2n\left(\ln n-\ln\left(n-2\right)\right)$

Rešenje:

a) Koristeći $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^{\beta n}, \alpha,\beta\in R$ imamo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3n}\right)^n=e^{-\frac{2}{3}}$.

b) Koristiti uslov $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(a_n\right) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$,

c) Izraz u brojiocu jednak je sumi geometrijskog niza $b_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$, dok je u brojiocu jednak $c_n = \dfrac{1}{5^{n-1}}$, odakle sledi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}}{\dfrac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{6}{5}.$$

Realne funkcije jedne realne promenljive

Granična vrednost funkcije

1. Naći sledeće granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x^4-2x^2-3}$

Rešenje:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1)\left(x^2+1\right) = 2\cdot 2 = 4$$

2. Naći

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2-x+7}{9x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^5-5x+3}{x^2+2x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^3+3x^2+2x+3}{5x^4+2x^2+x+3}$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x^4+2x^2+x+5}{5x^3+x^2+x+3}$

Rešenje

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{3x^2-x+7}{x^2}}{\dfrac{9x^2-1}{x^2}}=\dfrac{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x^2}}{9-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3},$

3. Izračunati sledeće granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

d) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)$

a) Racionalisanjem brojioca dobija se:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)}{x}\frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

b) Racionalisanjem imenioca

c) Množenje brojioca i imenioca sa $\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{\sqrt{x}\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{x}}{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}=1,$$

4. Naći

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+4}\right)^{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{2x+5}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)^{4x+2}$ e) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

Rešenje:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+4}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+4}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+4}\right)^{(2x+4)\frac{1}{2}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+4}\right)^{(2x+4)\frac{1}{2}}$

uvodimo smenu $2x+4=t,\ t\to 0,$ i dalje dobijamo rešenje $\sqrt{e}.$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{2x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x+5}}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x+5}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5}}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5}}$

važi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5}=1$

i uvodimo smenu $\frac{3}{x}=t, t\to 0,$ kada $x\to\infty$ pa je

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5}$ nakon uvođenja smene i sređivanja $\left(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{6}=e^{6.}$

Sličan postupak se primenjuje za $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5}$ pa je $\left(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{4}=e^{4}$, i nakon skraćivanja dobijamo e^2.

Zadatak se može uraditi i na sledeći način

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{2x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3}{x+2}-1\right)^{2x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{\frac{2x+5}{x+2}(x+2)}$ ...

Izvod funkcije

1. Naći prvi izvod funkcije

a) $y = ax^4 + bx^2 - cx + d\ln x$ b) $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x\sqrt{x}} + \sqrt[5]{e}$

c) $y = e^{3x^4}$ d) $y = \left(x^2 - x^{-2}\right)^2$

Rešenje:

a) $y' = \left(ax^4 + bx^2 - cx + d\ln x\right)' = 4ax^3 + 2bx - c + \dfrac{d}{x}$,

b) $y' = \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{4}} + \sqrt[7]{e}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' - \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' + \left(\sqrt[7]{e}\right)'$

$= \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} - \dfrac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}.$

c) $y = e^{3x^4}\left(3x^4\right)' = 12x^3e^{3x^4}$

d) $y' = 2\left(x^2 - x^{-2}\right)\left(2x + 2x^{-3}\right) = 4\left(x^3 - x^{-5}\right)$

ili

$y' = \left(x^4 + 2 + x^{-4}\right)' = 4\left(x^3 - x^{-5}\right)$

2. Naći prvi izvod funkcije

a) $y = \left(1 + 2x^2\right)\left(1 + 4x\right)$ b) $y = x^2\sqrt{x}\left(2\ln x + 10\right)$

c) $y = \dfrac{2x^2}{1 + x^4}$ d) $y = \dfrac{\left(x+1\right)^3}{\left(x-1\right)^2}$

Rešenje

a) $y' = \left(1 + 2x^2\right)'\left(1 + 4x\right) + \left(1 + 2x^2\right)\left(1 + 4x\right)'$

$= 4x\left(1 + 4x\right) + \left(1 + 2x^2\right)\cdot 4 = 4 + 4x + 24x^2$

c) $y' = \dfrac{\left(2x^2\right)'\left(1 + x^4\right) - 2x^2\left(1 + x^4\right)'}{\left(1 + x^4\right)^2}$

$$=\frac{4x\left(1+x^4\right)-2x^2 4x^3}{\left(1+x^4\right)^2}=\frac{4x\left(1-x^4\right)}{\left(1+x^4\right)^2}$$

3. Proveriti da li važi

a) $\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)'=\frac{-2x-1}{\left(x^2+1\right)^2}$ b) $\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{(1-x)^3}}$

c) $\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ d) $\left(3\ln\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{6}{x^2-1}$

e) $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2},\quad a,b,c,d\in R, cx+d\neq 0$

f) $\left(\frac{ax+b}{c+b}\right)'=\frac{a}{a+b},\quad a,b\in R, a+b\neq 0$

4. Naći drugi izvod funkcije

a) $y=(x-2)e^{2x}$ b) $y=x^2\ln x$ c) $y=\frac{1}{2x+3}$

Rešenje:

a) $y'=e^{2x}+2(x-2)e^{2x}=(2x-3)e^{2x}$

$y''=2e^{2x}+2(2x-3)e^{2x}=4(x-1)e^{2x}$

Ispitivanje funkcija

1. Ispitati osobine i nacrtati grafik funkcije

a) $y=x^4-8x^2+7$ b) $y=x^3+6x^2+9x$ c) $y=\frac{x^2-3x+2}{x+1}$

Rešenje:

a) $y=x^4-8x^2+7$

1) Funkcija je definisana za svako x iz skupa R.

2) Funkcija je parna

$f(-x)=(-x)^4-8(-x)^2+7=x^4-8x^2+7=f(x).$

3) Funkcija ima četiri nule i to $A_1(\sqrt{7},0), A_2(-\sqrt{7},0), A_3(1,0)$ i $A_4(1,0)$.

$x^4-8x^2+7=0$ uvodimo smenu $x^2=t$

$t^2-8t+7=0,\ \ t_1=7, t_2=1 \Rightarrow x_1=\sqrt{7}, x_2=-\sqrt{7}, x_3=1, x_4=-1.$

4) Tačke ekstremuma i monotonost

Stacionarne tačke dobijamo rešavanjem jednačine $y'=0$

$y'=4x^3-16x$

$4x^3-16x=0,\ \ x_1=0,\ \ x_2=2, x_3=-2.$

Intervale i vrstu monotonosti određujemo pomoću znaka prvog izvoda. Dovoljno je odrediti znak prvog izvoda u bilo kojoj tački svakog interval kao što je prikazano u narednoj tabeli.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	<0 (-)	0	>0 (+)	0	<0 (-)	0	>0 (+)
y	F-ja monotono opada	E_1 min	F-ja monotono raste	E_2 max	F-ja monotono opada	E_3 min	F-ja monotono raste

a) $x=-2$ tačka lokalnog minimuma $f(-2)=-9,\ E_1(-2,-9)$

b) $x=0$ tačka lokalnog maksimuma $f(0)=7,\ E_2(0,7)$

c) $x=2$ tačka lokalnog minimuma $f(2)=-9,\ E_3(2,-9).$

6) Intervali konveksnosti i konkavnosti i prevojne tačke funkcije

$y''=12x^2-16$

$12x^2-16=0,\ x_1=-\frac{2\sqrt{3}}{3}, x_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

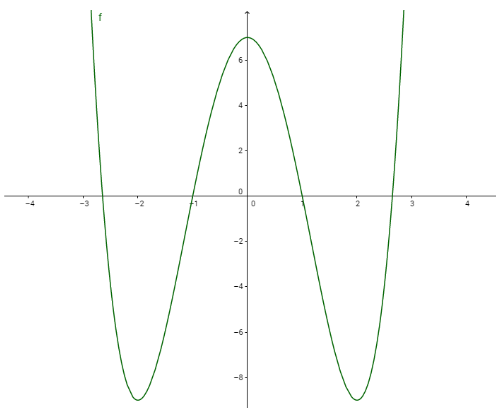
Intervale konveksnosti i konkavnosti određujemo pomoću znaka drugog izvoda. Dovoljno je odrediti znak drugog izvoda u bilo kojoj tački intervala kao što je prikazano u narednoj tabeli.

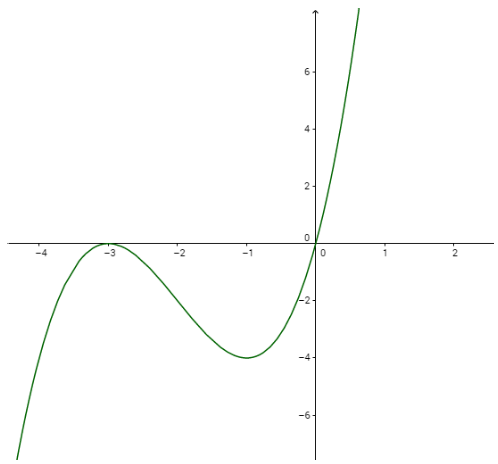
x	$(-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3})$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty)$
y''	> 0	0	<0	0	> 0
y	Funkcija je konveksna	P_1	Funkcija je konkavna	P_2	Funkcija je konveksna

$$f\left(x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{17}{9}=P_1$$

$$f\left(x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{17}{9}=P_2$$

Grafik funkcije $y=x^4-8x^2+7$ Grafik funkcije $y=x^3+6x^2+9x$





b) $y=x^3+6x^2+9x$

Funkcija je definisana za svako x iz skupa R. Funkcija nije ni parna ni neparna. Nule funkcije su $x_1=0, x_2=-3.$ Funkcija nema asimptote, jer je $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty.$

$y'=3x^2+12x+9,$ funkcija ima maksimum u $E_1(-3,0),$ a minimum u $E_2(-3,0),$ dok je prevojna tačka $P(-2,-2).$

c) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$

1) Funkcija je definisana za svako x iz R, osim za x=-1 $(\forall x\in R, x\neq -1).$

2) Funkcija nije ni parna ni neparna

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+3(-x)+2}{-x+1}=\frac{x^2-3x+2}{-x+1}\neq\pm f(x).$$

3) Funkcija ima dve nule i to u $A_1(1,0)$ i $A_2(2,0).$

$x^2-3x+2=0, x_1=1, x_2=2.$

4) Vertikalna asimptota $x=-1,$

Leva granična vrednost $\lim\limits_{x\to-1-}\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}=-\infty,$

Desna granična vrednost $\lim\limits_{x\to -1+} \dfrac{x^2-3x+2}{x+1} = +\infty,$

Kosa asimptota $y = kx+n = x-4,$ gde je

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)} = 1 \qquad n = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x+1}-x\right) = -4.$$

5) Tačke ekstremuma i monotonost

Stacionarne tačke dobijamo rešavanjem jednačine $y'=0$

$$y' = \left(\frac{x^2-3x+2}{x+1}\right)' = \frac{x^2+2x-5}{(x+1)^2},\ x^2+2x-5=0,\ \ x_1 = -1-\sqrt{6},\ \ x_2 = -1+\sqrt{6}$$

Intervale i vrstu monotonosti određujemo pomoću znaka prvog izvoda. Dovoljno je odrediti znak prvog izvoda u bilo kojoj tački svakog interval kao što je prikazano u narednoj tabeli.

$(x+1)^2 > 0, \forall x \neq -1$

x	$(-\infty,-1-\sqrt{6})$	$-1-\sqrt{6}$	$\left(-1-\sqrt{6},-1\right)\cup(-1,-1+\sqrt{6})$	$-1+\sqrt{6}$	$(-1+\sqrt{6},+\infty)$
y'	>0 (+)	0	<0 (-)	0	>0 (+)
y	Funkcija monotono raste	E_1 max	Funkcija monotono opada	E_2 min	Funkcija monotono raste

$$f\left(x=-1-\sqrt{6}\right) = -2\sqrt{6}-5 = E_1 \qquad f\left(x=-1+\sqrt{6}\right) = 2\sqrt{6}-5 = E_2$$

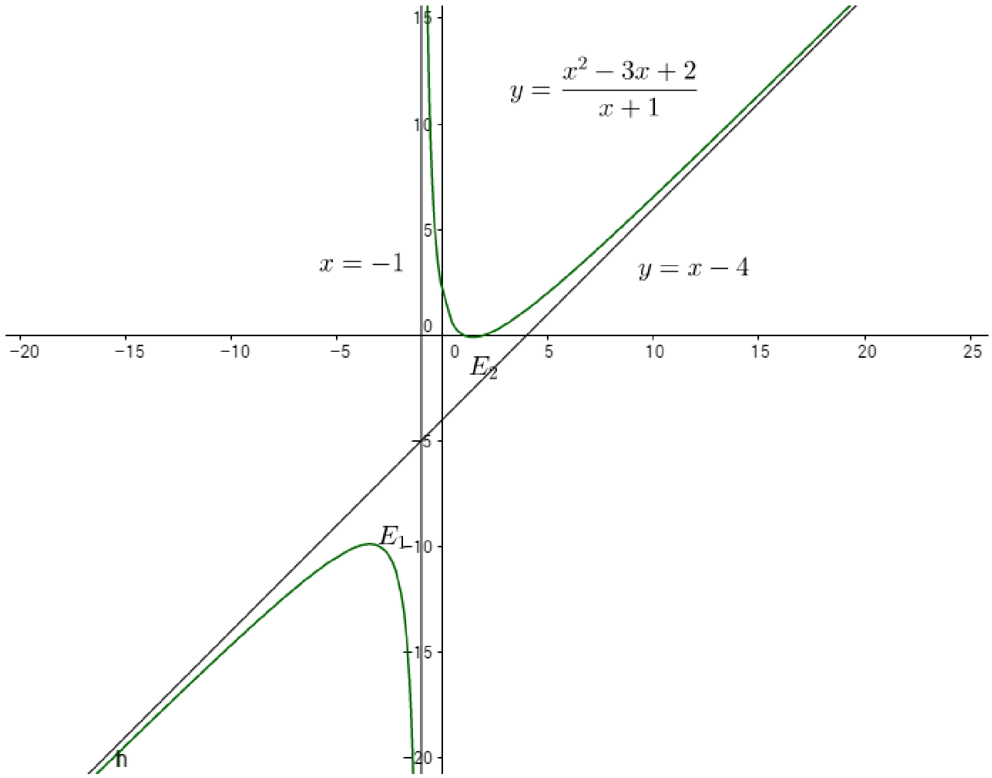
6) Intervali konveksnosti i konkavnosti i prevojne tačke funkcije

$$y'' = \frac{12}{(x+1)^3}$$

Drugi izvod je različit od nule za svako x iz oblasti definisanosti funkcije i nije definisan u tački x=-1.

Intervale konveksnosti i konkavnosti određujemo pomoću znaka drugog izvoda. Dovoljno je odrediti znak prvog izvoda u bilo kojoj tački intervala kao što je prikazano u narednoj tabeli.

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
y''	<0	>0
y	Funkcija je konkavna	Funkcija je konveksna

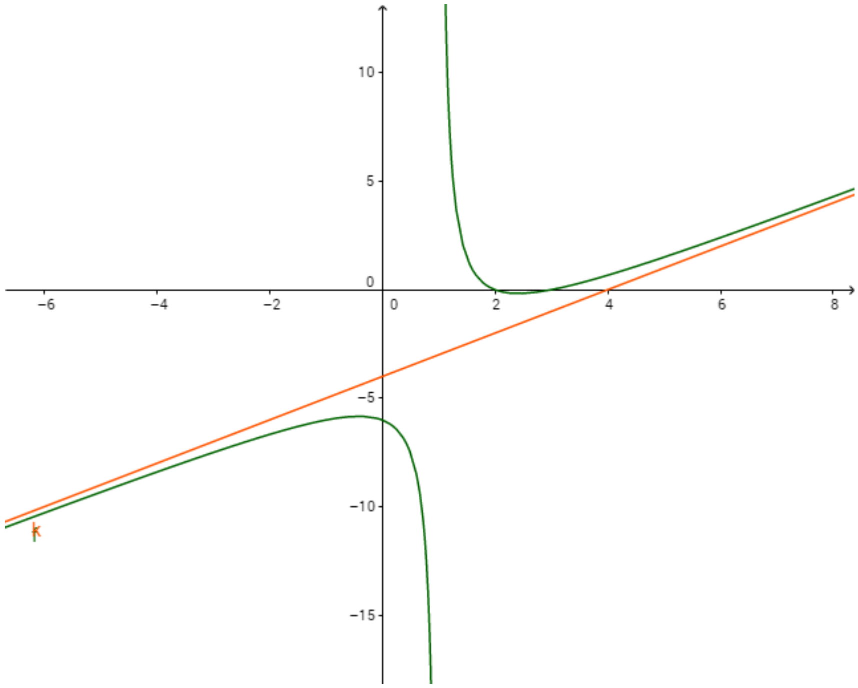


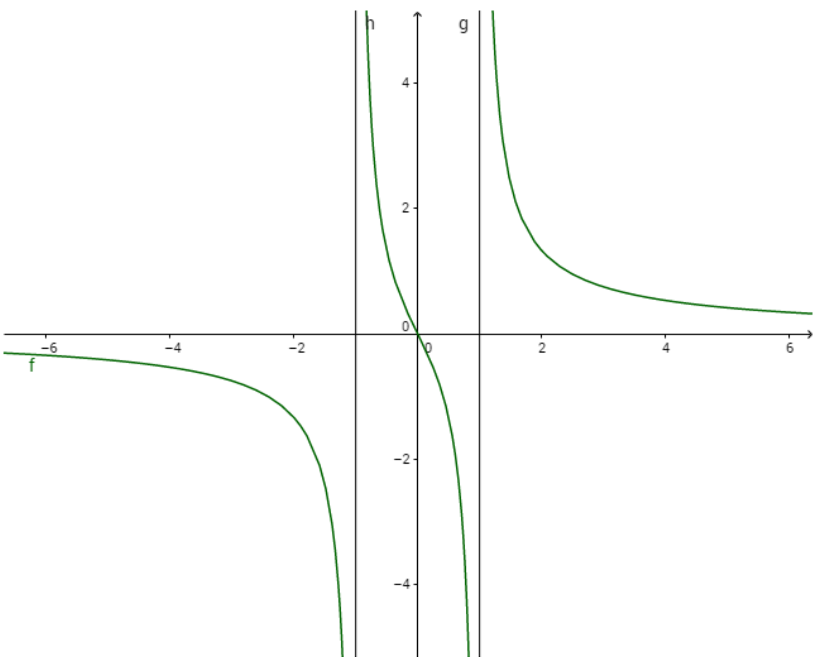
2. Ispitati osobine, ucrtati sve karakteristične tačke na grafiku funkcije i obeležiti asimptote ukoliko postoje.

a) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$ b) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ c) $y = x^4 - 4x^2 + 3$

Rešenje:

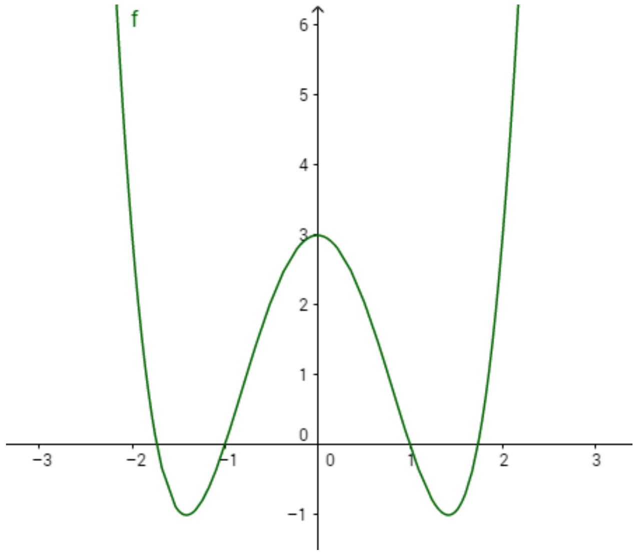
a) Grafik f-je $y=\frac{x^2-5x+6}{x-1}$





b) Grafik f-je $y=\frac{2x}{x^2-1}$

c) Grafik f-je $y = x^4 - 4x^2 + 3$



2. Ispitati osobine i nacrtati grafik funkcije

a) $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ b) $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+2)^2}$

Rešenje:

a) $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

1) Funkcija je definisana za svako x iz R, osim za x=-1.

2) Funkcija nije ni parna ni neparna

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x+1)^2} = \frac{-x^3}{2(-x+1)^2} \neq \pm f(x).$$

3) Funkcija ima jednu nulu u $A_1(0,0)$, $x^3 = 0$.

4) Vertikalna asimptota $x = -1$,

Leva granična vrednost $\lim\limits_{x \to -1-} \dfrac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$

Desna granična vrednost $\lim\limits_{x \to -1+} \dfrac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$

Kosa asimptota $y = kx + n = \frac{x}{2} - 1$, gde je

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2} \quad n = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2}\right) = -1.$$

5) Tačke ekstremuma i monotonost

Stacionarne tačke dobijamo rešavanjem jednačine $y' = 0$

$$y' = \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}\right)' = \frac{x^2(2x+6)}{4(x+1)^3},$$

$$x^2(2x+6) = 0, \ x_1 = -3, \ x_2 = 0.$$

Intervale i vrstu monotonosti određujemo pomoću znaka prvog izvoda. Dovoljno je odrediti znak prvog izvoda u bilo kojoj tački svakog interval kao što je prikazano u narednoj tabeli.

Prvi izvod nije definisan u tački -1.

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
y'	>0 (+)	0	<0 (-)	>0 (+)	>0 (+)
y	F-ja monotono raste	E_1 max	F-ja monotono opada	F-ja monotono raste	F-ja monotono raste

$$f(x=-3) = -\frac{27}{8} = E$$

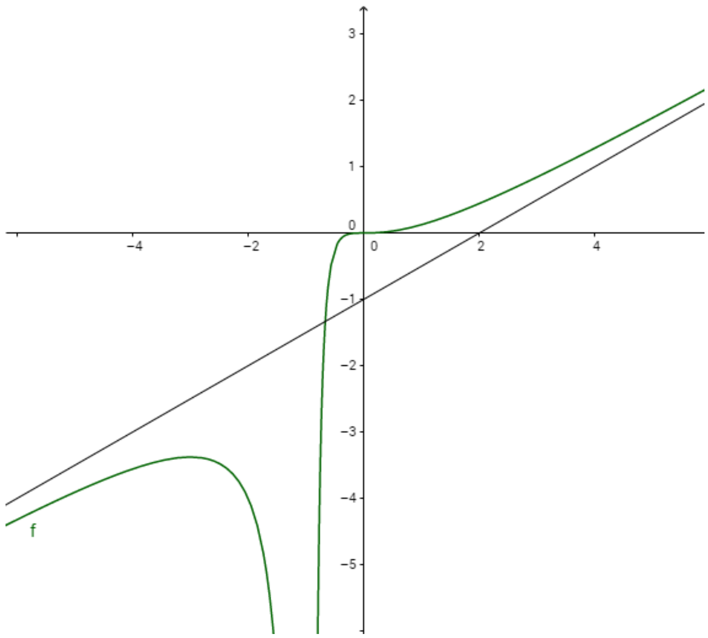
6) Intervali konveksnosti i konkavnosti i prevojne tačke funkcije

$$y'' = \frac{3x}{(x+1)^4} = 0, \ x = 0.$$

Drugi izvod nije definisan u tački x=-1.

Intervale konveksnosti i konkavnosti određujemo pomoću znaka drugog izvoda. Dovoljno je odrediti znak drugog izvoda u bilo kojoj tački intervala kao što je prikazano u narednoj tabeli.

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	>0	>0	0	< 0
y	Funkcija je konveksna	Funkcija je konveksna	$P(0,0)$	Funkcija je konkavna



Grafik f-je $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$

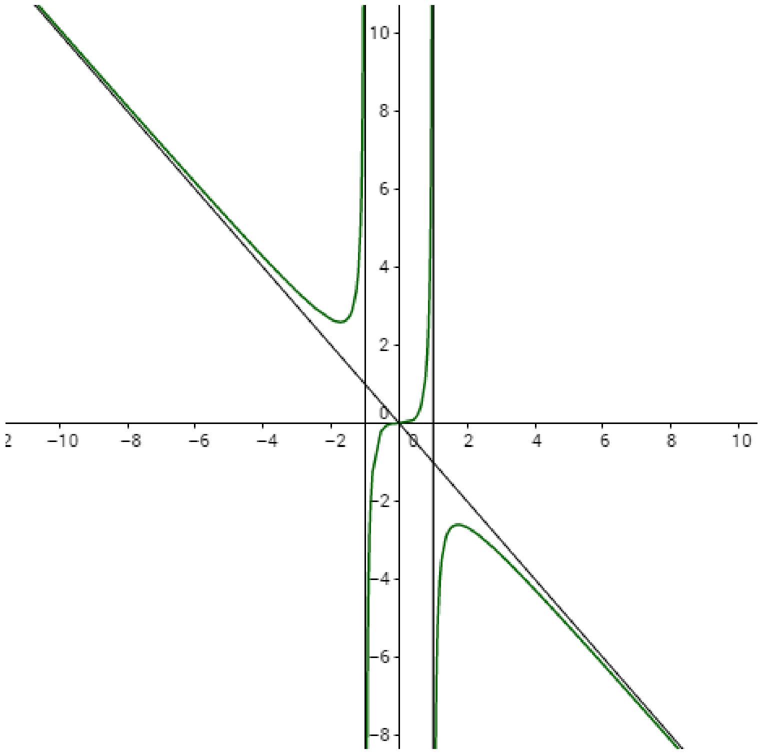
3. Ispitati osobine, ucrtati sve karakteristične tačke na grafiku funkcije i obeležiti asimptote ukoliko postoje.

a) $y=\frac{x^3}{1-x^2}$ b) $y=\frac{x^2-x-6}{x-2}$

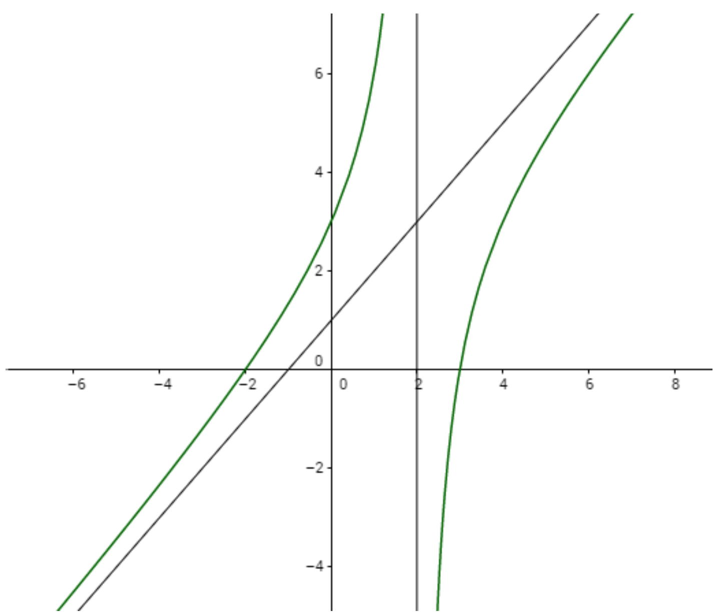
c) $y=x+\frac{1}{x^2}$ d) $y=\frac{1-x^3}{x^2}$

Rešenje:

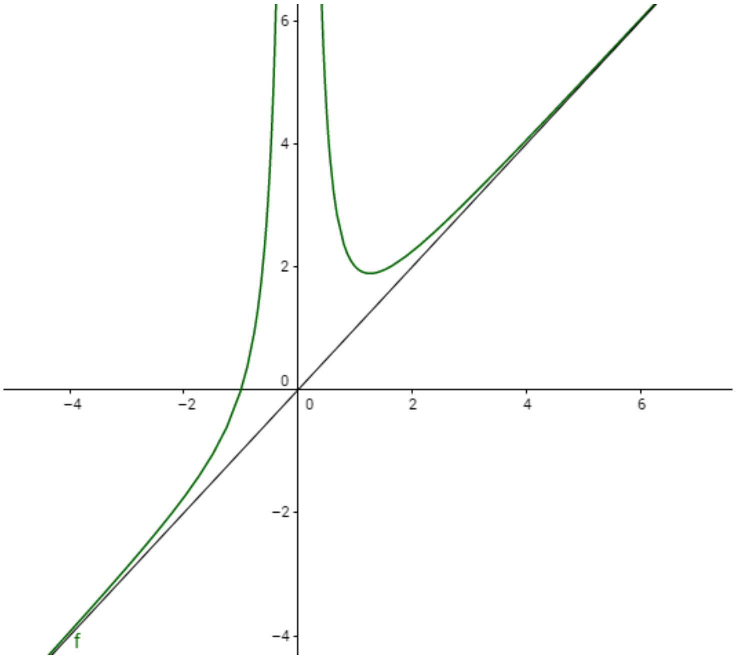
a) Grafik f-je $y=\frac{x^3}{1-x^2}$



b) Grafik f-je $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 2}$



c) Grafik f-je $y = x + \frac{1}{x^2}$



d) Grafik f-je $y = \frac{1 - x^3}{x^2}$