Nizovi

1. Osnovni pojmovi kod nizova

1.1. Definicija i osnovni pojmovi

Definicija 1.1.1. Svako preslikavanje $f: N \to R,$ skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva, nazivamo realnim nizom.

Broj koji se ovim preslikavanjem dodeljuje prirodnom broju n označavamo sa $x_n = f(n)$ i nazivamo ga n-ti član niza. Član x_n je opšti član niza i takav niz označava se sa $\{x_n\}$. Niz je potpuno određen svojim opštim članom. Na primer, ako je opšti član niza dat sa $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, članovi niza su $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, ...,$ Ako želimo da odredimo stoti član ovog niza, jednostavnim izračunavanjem za indeks niza n = 100 dobijamo $x_{100} = \dfrac{100}{101}$.

Definicija 1.1.2. Okolina tačke $a \in R$ je proizvoljan otvoren interval koji sadrži tačku a.

Otvoreni interval $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ dužine 2ε sa centrom u tački $a \in R$, naziva se simetrična ε - okolina tačke a ili samo ε - okolina tačke a.

Definicija 1.1.3. Za niz $\{x_n\}$ kažemo da je ograničen odozgo ako važi

$$(\exists M \in R)(\forall n \in N)\ x_n \ \leq\ M.$$

Niz je ograničen odozdo ako važi:

$$(\exists m \in R)(\forall n \in N)\ x_n \geq m.$$

Niz $\{x_n\}$ je ograničen ako je ograničen i sa gornje i sa donje strane.

Najmanja gornja granica niza $\{x_n\}$ je *supremum* i obeležava se sa $sup\ x_n$.

Najveća donja granica niza $\{x_n\}$ je *infimum* i obeležava se sa $inf\ \ x_n$.

1.3. Neperov broj (broj e)

Jedna od najvažnijih graničnih vrednosti je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

a) Niz $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$, tj. niz

$2, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, ..., \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, ...$ je monotono rastući.

b) Niz $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ je ograničen.

Niz $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ je monoton i ograničen, pa je i konvergentan i ima graničnu vrednost koja nije veća od 3 $(e \approx 2,7182818284)$. Granična vrednost ovog niza obeležava se sa e, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, i predstavlja osnovu prirodnih logaritama.

Primer 1.3.1. Naći $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = e\cdot 1 = e.$$

3. Zadaci za vežbu

1. Naći sledeće granične vrednosti

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{n^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-2}{2n^2+5n+4}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$.

2. Izračunati limese sledećih nizova

a) $a_n = \frac{(-3)^n+4n}{(-3)^{n+1}+4^{n+1}}$ b) $a_n = n\left(\ln(n+3)-\ln n\right)$

c) $a_n = \frac{6n+1}{\sqrt{4n^2-2n+1}}$ d) $a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$ e) $a_n = \frac{1+3+...+(2n-1)}{n+3} - n.$

Realne funkcije jedne realne promenljive

1. Granična vrednost funkcije

1.1. Pojam granične vrednosti

Neka je data funkcija $y = f(x)$. Ako promenljiva x teži nekoj vrednosti a, promenljiva (funkcija) y može i sama težiti nekoj vrednosti, konačnoj ili beskonačnoj.

Uzmimo u razmatranje funkciju $y = 2x - 1$.

Neka $x \to 0$ preko niza mogućih vrednosti većih od 0, tj. preko niza

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, \ldots, x_n = \frac{1}{n}, \ldots$$

Odgovarajuće vrednosti funkcija u ovom slučaju obrazuju niz

$$f(x_1) = 1, f(x_2) = 0, f(x_3) = -\frac{1}{3}, \ldots f(x_n) = \frac{2}{n} - 1, \ldots$$

koji teži broju -1 kad $n \to \infty$.

Neka sada promenljiva $x \to 0$ preko niza vrednosti

$$x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{4}, x_3 = -\frac{1}{6}, \ldots, x_n = -\frac{1}{2n}, \ldots$$

Tada odgovarajuće vrednosti funkcija obrazuju niz

$$f(x_1) = -2, f(x_2) = -\frac{3}{2}, f(x_3) = -\frac{4}{3}, \ldots f(x_n) = -\left(1 + \frac{1}{n}\right), \ldots$$

koji teži broju -1 kad $n \to \infty$.

Ako promenljiva $x \to 0$ preko bilo kog drugog niza, vrednost date funkcije uvek teži broju -1, pa je $\lim\limits_{x \to 0}(2x - 1) = -1$.

Definicija 1.1.1 (leva granična vrednost funkcije)

Broj l je leva granična vrednost funkcije $y = f(x)$ definisana u tačkama x, $r < x < a,$ u tački $x = a,$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za $x \neq a,$ važi

$$a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon, \text{ i pišemo } \lim_{x\to a^-} f(x) = l.$$

Definicija 1.1.2. (desna granična vrednost funkcije)

Broj d je leva granična vrednost funkcije $y = f(x)$ definisana u tačkama x, $a < x < r,$ u tački $x = a,$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za $x \neq a,$ važi

$$a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x)-d| < \varepsilon, \text{ i pišemo } \lim_{x\to a^+} f(x) = d.$$

Definicija 1.1.3. (granična vrednost funkcije)

Broj g je granična vrednost funkcije $y = f(x)$ definisane u okolini tačke $a,$ u tački $x = a,$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za $x \neq a,$ važi

$$a-\delta < x < a+\delta \Rightarrow |f(x)-g| < \varepsilon, \text{ i pišemo } \lim_{x\to a} f(x) = g.$$

Definicija 1.1.4. Za funkciju $f(x)$ kaže se da teži granici g kada $x \to \infty$ ako svakom, ma kako malom broju $\varepsilon > 0$ odgovara broj $N > 0$ takav da je

$$|f(x)-g| < \varepsilon, \text{za svako } |x| > N(\varepsilon).$$

Prethodnu definiciju možemo proširiti i na slučaj graničnih vrednosti $\pm\infty.$

Definicija 1.1.5. Funkcija $f(x)$ teži u beskonačnost kada $x \to a,$ ako svakom unapred datom broju $N > 0$ odgovara broj $\delta > 0,$ takav da je:

$$|f(x)| > N \text{ za svako } |x-a| < \delta.$$

Simbolički pišemo

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ili $f(x) \to \infty$ kad $x \to a.$

Definicija 1.1.6. Funkcija $f(x)$ teži ka $+\infty$ kada $x \to a,$ ako svakom unapred datom broju $N > 0$ odgovara broj $\delta > 0,$ takav da je:

$$f(x) > N \text{ za svako } |x-a| < \delta.$$

Simbolički pišemo

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ili $f(x) \to +\infty$ kad $x \to a.$

Definicija 1.1.7. Funkcija $f(x)$ teži ka $-\infty$ kada $x \to a,$ ako svakom unapred datom broju $N < 0$ odgovara broj $\delta > 0,$ takav da je:

$$f(x) < N \text{ za svako } |x-a| < \delta.$$

Simbolički pišemo

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ ili $f(x) \to -\infty$ kad $x \to a.$

1.3. Operacije sa graničnim vrednostima funkcija

Naredne teoreme, koje nećemo dokazivati, daju neke od osnovnih operacija sa graničnim vrednostima funkcija.

Teorema 1.3.1. Neka je $\lim_{x \to p} f(x) = a$ i $\lim_{x \to p} g(x) = b$ gde su a i b konačni brojevi i c proizvoljna konstanta. Tada važi:

1. $\lim_{x \to p} c \cdot f(x) = c \cdot a,$
2. $\lim_{x \to p} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b,$
3. $\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b,$
4. $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}, \; g(x) \neq 0, \; b \neq 0.$

Teorema 1.3.2. Neka je $\lim_{x \to p} f(x) = a$ i $\lim_{x \to p} g(x) = +\infty$ gde je a konačan broj. Tada važi:

1. $\lim_{x \to p} c \cdot g(x) = +\infty, \; c > 0;$ $\lim_{x \to p} c \cdot g(x) = -\infty, \; c < 0,$
2. $\lim_{x \to p} (f(x) \pm g(x)) = \pm\infty,$
3. $\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty, \; a > 0;$ $\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty, \; a < 0,$
4. $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \; a \neq 0.$

Napomena: Analogno važi kada je $\lim_{x \to p} g(x) = -\infty.$

Teorema 1.3.3. Ako funkcije $f(x)$ i $g(x)$ imaju u tački a jednake granične vrednosti,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = A$$

i ako za sve argumente x u nekoj okolini tačke a važi $f(x) \le \phi(x) \le g(x)$, tada funkcija $f(x)$ ima u tački a graničnu vrednost jednaku A, $\lim\limits_{x\to a}\phi(x) = A$.

Napomena: U zadacima se često koriste sledeće granične vrednosti:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^a} = \begin{cases} 0, & a>0 \\ 1, & a=0 \\ +\infty, & a<0 \end{cases}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} q^x = \begin{cases} 0, & |q|<1 \\ 1, & q=1 \\ \infty, & q>1 \\ \text{ne postoji}, & q\le -1 \end{cases}$

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

4. Zadaci za vežbu

Odrediti sledeće granične vrednosti (1-5):

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-3}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x+1}{4x^2-1}$

   c) $\lim\limits_{x\to 2}3(x^2-1)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-x+x^3-x^5)$

   e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{a^x}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}3x(\sqrt{x^2-1}-x)$.

2. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{x^3+3x^2+x+5}$

   c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-2}{x^3-2}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x+x^3-x^5)$.

3. a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$

   d) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}$ e) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^3-8x^2+15x}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-16x}{2x^2+4x-16}$.

4. a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-10x})$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x-3}-\sqrt{x})$ d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$.

5. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{5x}\right)^{x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{x-1}\right)^{\frac{2x+1}{3x^2}}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x^2-3}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}}$

V GLAVA

Diferenciranje funkcija jedne realne promenljive

1. Izvod i diferencijal funkcije

1.1. Definicija izvoda

Neka je $y = f(x)$ neprekidna funkcija definisana u intervalu (a,b). Neka proizvoljna vrednost argumenta x dobije priraštaj (promena argumenta) $\Delta x,$ tada funkcija dobije priraštaj Δy .

Količnik

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

predstavlja srednji priraštaj funkcije $f(x)$.

Definicija 1.1.1. Izvod funkcije $y = f(x)$ po argumentu x je granična vrednost količnika priraštaja funkcije i priraštaja njenog argumenta kad priraštaj argumenta teži nuli, tj.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

gde je y' oznaka za izvod funkcije.

Za funkciju $y = f(x)$ kaže se da je diferencijabilna u tački a ako u toj tački ima izvod, a diferencijabilna u čitavom intervalu (a,b) ako ima izvod u svakoj tački ovog intervala.

Stav 1.1.1. Ako je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna u nekoj tački $x = a,$ onda je ona u toj tački i neprekidna.

Dokaz. Funkcija $y = f(x)$ ima konačan izvod u tački $x = a,$ pa je prema definiciji granične vrednosti:

$$\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon(\Delta x).$$

Odnosno,

$$f\left(a+\Delta x\right)-f\left(a\right)=f\,'(a)\Delta x+\Delta x\varepsilon(\Delta x).$$

Pošto $\varepsilon(\Delta x)\to 0$ kada $\Delta x\to 0,$ onda je

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[f\left(a+\Delta x\right)-f\left(a\right)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}f\,'\left(x\right)\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\varepsilon\Delta x=0,$$

ili

$$\lim_{\Delta x\to 0}f\left(a+\Delta x\right)=f\left(a\right),$$

tj. funkcija je neprekidna u tački a.

Tablica izvoda nekih funkcija

1. $\left(const\right)'=0$	2. $\left(x^a\right)'=ax^{a-1}$ gde $a\in R$
3. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a,\ \ a>0,$	4. $\left(e^x\right)'=e^x$
5. $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a},\ a>0,\ a\neq 1,$	6. $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)'=\cos x$	8. $(\cos x)'=-\sin x$
9. $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	10. $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	12. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\mathrm{arc}\,tgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	14. $(\mathrm{arc}\,ctgx)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

1.2. Pravila za izračunavanje izvoda funkcije

[1] Izvod zbira ili razlike funkcija

Stav 1.2.1. Izvod zbira konačnog broja diferencijabilnih funkcija jednak je algebarskom zbiru pojedinih sabiraka.

Neka je data funkcija $y=c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+...+c_n f_n(x),$ gde su c_i proizvoljne konstante,

onda je $y'=c_1 f_1'(x)+c_2 f_2'(x)+...+c_n f_n'(x),$ ili $\left(\sum_{i=1}^{n}c_i f_i\ \ (x)\right)'=c_i f_i'(x).$

Primer 1.2.1. Prvi izvod funkcije $y = x^2 - \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ je $y' = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$.

[2] Izvod proizvoda dve funkcije

Stav 1.2.2. Neka je $y = f(x) \cdot g(x)$ proizvod dve diferencijabilne funkcije, tada je

$$y' = \left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Primer 1.2.2. Prvi izvod funkcije $y = x^2\sqrt{x}$ je $y' = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$.

[3] Izvod količnika dve funkcije

Stav 1.2.3. Izvod količnika dve diferencijabilne funkcije $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ gde je $g(x) \neq 0$ jednak je:

$$y' = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Primer 1.2.3. Prvi izvod funkcije $y = \frac{x-1}{x+1}$

$$y' = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

[4] Izvod inverzne funkcije

Teorema 1.2.1. Ako funkcija $f(x)$ u intervalu (a,b) zadovoljava uslove:

1. Ima izvod u tački $x \in (a,b)$,
2. Strogo je monotona u intervalu (a,b),
3. Izvod $f'(x)$ je različit od nule.

Tada njena inverzna funkcija $f^{-1}(x)$ ima izvod u tački *y*, koja odgovara tački *x*, i jednak je

$$\left((f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(x)}.$$

[5] Izvod složene funkcije

Za funkciju $y = f(u)$, gde je $u = g(x)$, kaže se da je složena funkcija od x preko g.

Stav 1.2.4. Ako je $y = f(u)$, gde je $u = g(x)$, i obe funkcije $f(u)$ i $g(x)$ diferencijabilne, onda je izvod date funkcije:

$$y'_x = y'_u u'_x = f'(u)g'(x).$$

Primer 1.2.4. Izvod funkcije $y = \ln\left(x^3 - 3x + 5\right)$

$$y' = \frac{1}{x^3 - 3x + 5}\left(3x^2 - 3\right) = \frac{3\left(x^2 - 1\right)}{x^3 - 3x + 5}.$$

1.3. Izvodi višeg reda

Videli smo da je izvod funkcije funkcija. Izvod takođe može imati svoj izvod.

Neka je $y = f(x)$ diferencijabilna funkcija i neka je njen izvod

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Ako je granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

konačna, onda se ova granična vrednost zove izvod drugog reda ili drugi izvod funkcije i obeležava se sa y'' ili $f''(x)$. Isto tako i drugi izvod jeste funkcija i može imati svoj izvod. Na sličan način možemo definisati i izvode n-tog reda ili n-ti izvod.

2. Ispitivanje funkcija

2.1. Monotonost i lokalni ekstremumi funkcija

U delu 1.6 (glava I) definisali smo pojam monotone funkcije i naglasili da se za neke klase funkcija može, primenom izvoda, jednostavno ispitati da li je neka funkcija monotona na nekom delu svoje oblasti definisanosti.

Naredne teoreme prihvatićemo bez dokazivanja.

Teorema 2.1.1. Diferencijabilna funkcija f je neopadajuća u intervalu (a,b) ako i samo ako za svako x iz (a,b) važi nejednakost $f'(x) \geq 0,$ a nerastuća je samo ako je $f'(x) \leq 0$ za svako x iz $(a,b).$

Teorema 2.1.2. Ako za svako x iz (a,b) važi nejednakost $f'(x) > 0,$

diferencijabilna funkcija f je rastuća u intervalu $(a,b).$ Ako je, međutim,

$f'(x) < 0,$ funkcija je opadajuća u intervalu (a,b).

Neka je funkcija $f(x)$ definisana na otvorenom intervalu (a,b).

Tada funkcija u tački $c \in (a,b)$ ima:

1) Lokalni maksimum $f(c)$, ako postoji δ > 0 takvo da

$$(|x-c| < \delta) \Rightarrow (f(x) \leq f(c))$$

Odnosno, strogi lokalni maksimum $f(c)$, ako postoji δ > 0 takvo da

$$(0 < |x-c| < \delta) \Rightarrow (f(x) < f(c)).$$

2) Lokalni minimum $f(c)$, ako postoji δ > 0 takvo da

$$(|x-c| < \delta) \Rightarrow (f(x) \geq (c))$$

Odnosno, strogi lokalni maksimum $f(c)$, ako postoji δ > 0 takvo da

$$(0 < |x-c| < \delta) \Rightarrow (f(x) > f(c)).$$

Nije teško zaključiti da ako je funkcija $f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ rastuća, da je tada $f(a)$ minimum, a $f(b)$ maksimum funkcije *f* na segmentu [a, b]. I obrnuto, ako je *f* opadajuća funkcija, tada je $f(a)$ maksimum i $f(b)$ minimum funkcije $f(x)$ za $x \in [a,b]$.

Za najmanju i najveću vrednost neke funkcije, tj. za njen minimum i njen maksimum, često se kaže da su to njene ekstremne vrednosti ili da su to njeni ekstremumi .

Teorema 2.1.3. Neka je funkcija $f(x)$ dvaput diferencijabilna u tački $x = a$ i neka je $f'(a) = 0$ i $f''(a) \neq 0$. Tada funkcija *f* u tački a dostiže svoj maksimum ako je $f''(a) < 0$, a minimum ako je $f''(a) > 0$.

Teorema 2.1.4. Ako funkcija $f(x)$ ima lokalni ekstremum u tački $c \in (a, b)$ i ako je diferencijabilna u tački c, tada je $f'(c) = 0$.

Dokaz: Neka je $f(c)$ lokalni maksimum. Tada je $f(c+h) - f(c) \leq 0,$ pa za *h > 0* važi

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

dok za h < 0 važi

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 .$$

Dalje sledi, da kada $h \to 0$ desna granična vrednost je $f'(c+0) \leq 0,$ dok je leva granična vrednost $f'(c-0) \geq 0.$

Kako po pretpostavci postoji $f'(c)$, onda mora da važi

$f'(c) = f'(c+0) = f'(c-0)$, a to je moguće samo ako je $f'(c) = 0.$

Na sličan način se dokazuje slučaj kada je $f(c)$ lokalni minimum.

Na osnovu prethodnog, zaključujemo da je $f'(c) = 0$ potreban uslov da diferencijabilna funkcija $f(x)$ u tački $x = c$ ima ekstremum. Taj uslov nije dovoljan što se može videti iz primera funkcije $f(x) = x^3.$ Za funkciju važi da je $f' = 3x^2 = 0$ za $x = 0,$ ali ova tačka ne predstavlja lokalni ekstremum jer je $x^3 < 0$ za $x < 0$ i $x^3 > 0$ za $x > 0.$

Tačka c u kojoj je $f'(c) = 0,$ zove se stacionarna tačka. Da bi stacionarna tačka bila lokalni ekstremum potrebno je da $f'(x)$ u toj tački menja znak. Pored stacionarnih tačaka funkcija može imati ekstremume i u tačkama u kojima prvi izvod nije definisan.

Primer 2.1.1. Funkcija $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ ima prvi izvod

$y' = x^2 - 4x + 3$ i $a = 1 > 0,$ pa $y' = 0 \Rightarrow \; x_1 = 1, x_2 = 3.$ Odakle se dobijaju stacionarne tačke x = 1 i x = 3. Kako izvod funkcije menja znak prilikom prolaska kroz obe tačke, to one predstavljaju lokalne ektremume i to za x=1 lokalni maksimum $y(1) = 7/3,$ a za x = 3 lokalni minimum $y(3) = 1.$

2.3. Asimptote

Prava *p* je asimptota krive $y = f(x)$ ako i samo ako udaljenost d tačke $M(x, f(x))$ krive od prave *p* teži nuli kada se M udaljava u beskonačnost $(+\infty,$ ili $-\infty)$ po krivoj.

Postoje vertikalne, horizontalne i kose asimptote.

Vertikalna asimptota može postojati samo u konačnim graničnim tačkama oblasti definisanosti funkcije (tačkama u kojima funkcija nije definisana). Broj vertikalnih asimptota funkcije je neograničen.

Definicija 2.3.1. Prava $x=a$ je

a) vertikalna asimptota funkcije $f\left(x\right)$ sa leve strane ako je

$$\lim_{x\to a-} f(x)=+\infty \quad \vee \quad \lim_{x\to a-} f(x)=-\infty,$$

b) vertikalna asimptota funkcije $f\left(x\right)$ sa desne strane ako je

$$\lim_{x\to a+} f(x)=+\infty \quad \vee \quad \lim_{x\to a+} f(x)=-\infty.$$

Funkcija može imati najviše dve horizontalne asimptote.

Definicija 2.3.2. Prava $y=b$ je

a) horizontalna asimptota udesno funkcije $f\left(x\right)$ ako je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b,$

b) horizontalna asimptota ulevo funkcije $f\left(x\right)$ ako je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b.$

Funkcija $f\left(x\right)$ može imati kosu asimptotu kada $x\to\infty$ samo ako nema horizontalnu asimptotu kada $x\to\infty.$ Analogno važi kada i za $x\to-\infty.$ Prema tome, ukupan broj horizontalnih i kosih asimptota funkcije je najviše dve.

Definicija 2.3.3. Prava $y=kx+n$ je

a) desna kosa asimptota funkcije $f(x)$ ako je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad \wedge \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=n,$$

b) leva kosa asimptota funkcije $f(x)$ ako je

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=n.$$

Obe granične vrednosti moraju postojati i biti konačne. Može se dogoditi da prva granična vrednost bude konačna, a druga beskonačna ili da ne postoji, i u tom slučaju ne postoji kosa asimptota.

2.4. Grafičko predstavljanje funkcija

U prethodnim odeljcima izučavali smo lokalne osobine funkcija kao i načine pomoću kojih se te osobine mogu konstatovati, a u ovom odeljku ćemo pokazati kako je na osnovu tih osobina moguće nacrtati odgovarajuće grafike posmatranih funkcija. Namera da se nacrta grafik neke funkcije ukazuje na potrebu da se za datu funkciju utvrde sve ili, ako to nije moguće, onda, što više njenih lokalnih osobina.

Crtanju, odnosno skiciranju grafika funkcije prethodi ispitivanje funkcije. Opšti postupak ispitivanja funkcija sadrži sledeće elemente:

- [1] Nalaženje oblasti definisanosti funkcije
- [2] Ispitati da li je funkcija parna, neparna ili ni parna ni neparna
- [3] Ispitivanje periodičnosti funkcije
- [4] Nalaženje tačaka u kojima grafik funkcije seče koordinatne ose, odnosno nalaženje nula funkcije
- [5] Ispitivanje ponašanja funkcije na krajevima oblasti definisanosti, kao i nalaženje asimptota
- [6] Određivanje intervala monotonosti i lokalnih ekstremuma
- [7] Određivanje intervala konveksnosti i konkavnosti i prevojnih tačaka

Primer 2.4.1. Ispitivanje funkcije $y=\dfrac{x^2+3x}{x+4}$ i crtanje njenog grafika.

Rešenje:

1) Funkcija je definisana za svako x iz R, osim za x=-4 $(\forall x\in R, x\neq -4)$.

2) Funkcija nije ni parna ni neparna

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+3(-x)}{-x+4}=\frac{x^2-3x}{-x+4}\neq \pm f(x).$$

3) Funkcija ima dve nule i to $A_1(0,0)$ i $A_2(-3,0)$.

$$x^2+3x=0,\ x=0\vee x=-3.$$

4) Vertikalna asimptota $x=-4$,

Leva granična vrednost $\lim\limits_{x\to -4-}\dfrac{x^2+3x}{x+4}=-\infty$,

Desna granična vrednost $\lim\limits_{x\to -4+}\dfrac{x^2+3x}{x+4}=+\infty$.

Kosa asimptota $y=kx+n=x-1$, gde je

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{x\left(x+4\right)}=1\qquad n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x}{x+4}-x\right)=-1.$$

5) Tačke ekstremuma i monotonost. Stacionarne tačke dobijamo rešavanjem jednačine $y'=0$

$$y'=\left(\frac{x^2+3x}{x+4}\right)'=\frac{(2x+3)(x+4)-(x^2+3x)}{(x+4)^2}=\frac{x^2+8x+12}{(x+4)^2},$$

$x^2+8x+12=0,\ x_1=-6,\ x_2=-2$

Intervale i vrstu monotonosti određujemo pomoću znaka prvog izvoda.

Dovoljno je odrediti znak prvog izvoda u bilo kojoj tački svakog interval kao što je prikazano u narednoj tabeli. $(x+4)^2>0, \forall x\neq -4$

x	$(-\infty,-6)$	-6	$(-6,-4)\cup(-4,-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
y'	>0 (+)	0	<0 (-)	0	>0 (+)
y	Funkcija monotono raste	E_2 maksimum	Funkcija monotono opada	E_1 minimum	Funkcija monotono raste

Kako je $y'>0$, u intervalu $(-\infty,-6)\cup(-2,+\infty)$, funkcija monotono raste, dok je $y'<0$, za x iz $(-6,-4)\cup(-4,-2)$ to je:

a) $x=-2$ tačka lokalnog minimuma $f(-2)=-1,\ E_1(-2,-1)$

b) $x=-6$ tačka lokalnog maksimuma $f(-6)=-9,\ E_2(-6,-9)$.

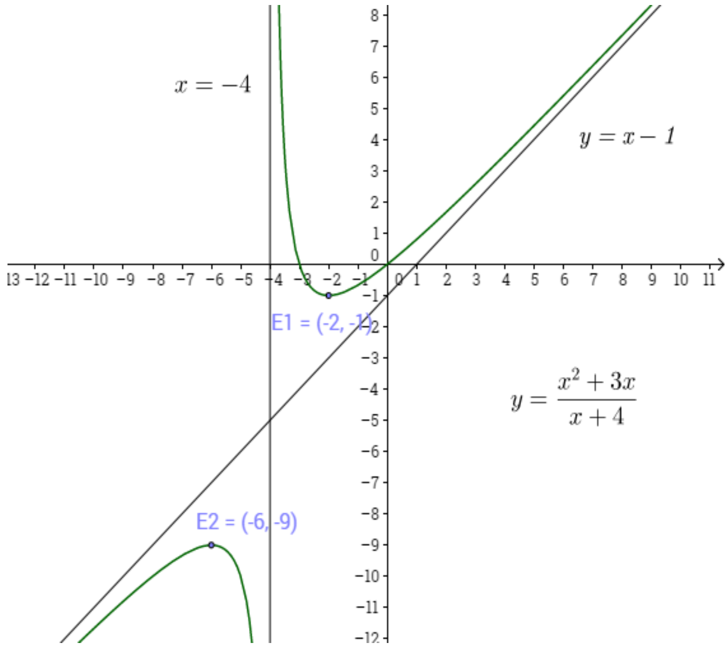
6) Intervali konveksnosti i konkavnosti i prevojne tačke funkcije

$$y''=\left(\frac{x^2+8x+12}{(x+4)^2}\right)'=\frac{8}{(x+4)^3}$$

Drugi izvod je različit od nule za svako x iz oblasti definisanosti funkcije i nije definisan u tački x=-4. Intervale konveksnosti i konkavnosti određujemo pomoću znaka drugog izvoda. Dovoljno je odrediti znak drugog izvoda u bilo kojoj tački intervala kao što je prikazano u narednoj tabeli.

x	$(-\infty,-4)$	$(-4,+\infty)$
y''	<0	>0
y	Funkcija je konkavna	Funkcija je konveksna

Grafik funkcije prikazan je na slici V 2.



Slika V 2.

3. Zadaci za vežbu

Odrediti prvi izvod funkcija (1-4)

1. a) $y = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 11$ b) $y = -x^3 + 9x^2 + x - 1$

   c) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$ d) $y = \frac{x^5}{a+b} - \frac{x}{a-b} - x$

   e) $y = x\sqrt{x\sqrt{x}}$.

2. a) $y = (2+3x)(4-7x)$ b) $y = x(2x-1)(3x+2)$

   c) $y = x^2\sqrt{x}(2\ln x + 6)$ d) $y = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{5x^3} + 4.$

3. a) $y = \frac{x-1}{x+1}$ b) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$ c) $y = \ln\frac{e^x}{1+e^x}$

   d) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}$ - $\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$).

4. a) $y=\dfrac{-4x}{(x^2+x+1)^2}$ b) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$.

5. Naći granične vrednosti funkcija

a) $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln\left(e^x-e^a\right)}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-xe^{\frac{1}{x-2}}\right)$.

Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik (6-11)